# 典型リー群のカシミア不変量

角藤 亮

June 11, 1997

**概要**

これは 1981 年 3 月 30 日発行の近畿大学九州工学部教養論集第 3 巻第 3 号で出版されたものを再録したものであり、物理で有用なカシミア不変量について解説したものである。

# Contents



## 1 始めに

物理学ではある力学系が、ある種の変換に対して不変である場合を扱う場合が多く、その変換群として Lie 群の初歩的知識が必要になることが多い。その際、物理量を表すものとしてカシミア不変量 (Casimir invariants) を必要とすることがしばしばある。例えばゲージ理論の 2 次の摂動では 2 次のカシミア不変量が登場する。また、chiral anomaly が無いゲージ模型を作るためには、種々の表現に属する Weyl spinors の 3 次カシミア不変量を調べなければならない。従って任意の次数のカシミア不変量に対する一般的な公式を使いやすい形で与えておくことは応用上非常に便利であり、重要でもあると考えられる。そこでこの論文では典型リー群の compact form すなわち $SU(n)$, $SO(2n+1)$, $Sp(2n)$, および $SO(2n)$ のカシミア不変量についての一般的な取り扱い方について解説し、あわせて応用上有用な公式を 2∼3 あげることにしたい。参考文献として [1] と [2] をあげておく。

## 2 定義

Lie 群を $G$ とし、その Lie algebra を $L_G$ と書くことにしよう。任意の $X \in L_G$ に対して

$$[X, C] = 0 \tag{1}$$

を満たす $C$ を Casimir invariant operator あるいは単に Casimir invariant という。$L_G$ の bases を $X_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ としよう。ここで $n$ は多様体としての $G$ の次元である。

$$[X_i, X_j] = c_{ijk} X_k \tag{2}$$

で $L_G$ の構造定数 $c_{ijk}$ を定義する。特にことわらない限り同じ添え字が 2 回あれば和をとるものと約束する。ここでは compact group だけに注目するので、添え字の上下については気をくばらない。今、adjoint 表現の表現行列を

$$U = \exp(\theta_i F_i), \quad (F_i)_{jk} = -c_{ijk} \tag{3}$$

とするとき

$$g_{i_1 i_2 \cdots i_p} = U_{i_1 j_1} U_{i_2 j_2} \cdots U_{i_p j_p}\ g_{j_1 j_2 \cdots j_p} \tag{4}$$

を満たすテンソル $g$ を adjoint group に対する invariant tensor という。(4) を無限小変換の形で書くと

$$\sum_k \theta_i\, c_{i i_k j}\, g_{i_1 \cdots i_{k-1} j i_{k+1} \cdots i_p} = 0 \tag{5}$$

となる。 さて $g$ が invariant tensor であれば

$$C_p = g_{i_1 i_2 \cdots i_p} X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_p} \tag{6}$$

は Casimir invariant である。何故ならば、$X = X_i \theta_i$ とするとき

$$\begin{aligned}
[X, C_p] &= g_{i_1 \cdots i_p} \sum_k X_{i_1} \cdots X_{i_{k-1}} [X, X_{i_k}] X_{i_{k+1}} \cdots X_{i_p} \\
&= \theta_i g_{i_1 \cdots i_p} \sum_k X_{i_1} \cdots X_{i_{k-1}} c_{i i_k j} X_j X_{i_{k+1}} \cdots X_{i_p}
\end{aligned}$$

であるが、ここで dummy indices $i_k$ と $j$ を入れ換えると

$$\begin{aligned}
[X, C_p] &= \theta_i \sum_k g_{i_1 \cdots i_{k-1} j i_{k+1} \cdots i_p} c_{i j i_k} X_{i_1} \cdots X_{i_p} \\
&= -\sum_k \theta_i c_{i i_k j} g_{i_1 \cdots i_{k-1} j i_{k+1} \cdots i_p} X_{i_1} \cdots X_{i_p}
\end{aligned}$$

となり、これは (5) より 0 となるからである。
次に $L_G$ のある表現を $\Lambda_i$ とするとき、

$$g_{i_1 \cdots i_p} = \mathrm{Tr}\left(\Lambda_{i_1} \cdots \Lambda_{i_p}\right) \tag{7}$$

は adjoint group に対する invariant tensor であることを示そう。明らかに $\Lambda_i$ 自身 $G$ の adjoint 表現をなすから、無限小変換に対して

$$\delta\Lambda_j = -\theta_i\, c_{ijk}\Lambda_k = -\theta_i[\Lambda_i, \Lambda_j] = -[\Lambda, \Lambda_j], \quad \Lambda = \theta_i\Lambda_i \tag{8}$$

のように変換する。従って

$$\begin{aligned}
\delta g_{i_1 i_2 \cdots i_p} &= -\sum_k \mathrm{Tr}\left(\Lambda_{i_1}\cdots\Lambda_{i_{k-1}}[\Lambda, \Lambda_{i_k}]\Lambda_{i_{k+1}}\cdots\Lambda_{i_p}\right) \\
&= -\sum_k \mathrm{Tr}\left(\Lambda\Lambda_{i_k}\cdots\Lambda_{i_p}\Lambda_{i_1}\cdots\Lambda_{i_{k-1}}\right) + \sum_k \mathrm{Tr}\left(\Lambda\Lambda_{i_{k+1}}\cdots\Lambda_{i_p}\Lambda_{i_1}\cdots\Lambda_{i_k}\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{9}$$

となるからである。以上より一般に

$$C_p = \mathrm{Tr}\left(\Lambda_{i_1}\cdots\Lambda_{i_p}\right) X_{i_1}\cdots X_{i_p} \tag{10}$$

は Casimir invariant である。(10) を Casimir invariant of $p$-th order あるいは $p$-th order Casimir operator ($p$ 次カシミア演算子) とよぶ。今後、典型リー群の compact form すなわち特殊ユニタリ群 $SU(n)$、実直交群 $SO(N)$ およびユニタリシンプレクティック群 $Sp(2n)$ の場合の $C_p$ のスペクトルを調べることにする。

# 3 $U(n)$ と $SU(n)$ のカシミア不変量

## 3.1 $U(n)$ のカシミア不変量

Lie algebra $L_G = u(n)$ の bases として

$$M_i{}^i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{no sum over } i, \tag{11}$$

$$M_i{}^j, \quad (i \neq j), \tag{12}$$

$$\left(M_i{}^i\right)^\dagger = M_i{}^i, \quad \left(M_i{}^j\right)^\dagger = M_i{}^j \tag{13}$$

を考える。$M_i{}^i$, (no sum) は Cartan subalgebra を形成する。さて $u(n)$ の elements (11)–(13) は

$$[A_j{}^i, A_l{}^k] = \delta_l{}^i A_j{}^k - \delta_j{}^k A_l{}^i, \quad \left(A_i{}^j\right)^\dagger = A_j{}^i \tag{14}$$

を満たす $gl(n, R)$ の elements $A_i{}^j$ を用いて

$$M_k{}^k = A_k{}^k, \quad (k = 1, 2, \dots n), \quad \text{no sum over } k, \tag{15}$$

$$M_l{}^k = A_l{}^k + A_k{}^l, \quad (k < l \le n), \tag{16}$$

$$M_k{}^l = i\left(A_l{}^k - A_k{}^l\right), \quad (k < l \le n) \tag{17}$$

として 1 次結合で表すことができる。つまり $GL(n,R)$ の Casimir invariants を求めれば $U(n)$ の Casimir invariants もわかる。ここで (7) における $\Lambda_i$ として、$gl(n,R)$ の $n$ 次元ベクトル表現 $(V_i{}^j)_l{}^s = \delta_{il}\delta^{js}$ を使うことにすれば、invariant tensor $g$ は

$$g_{i_1\cdots i_p}^{j_1\cdots j_p} = \mathrm{Tr}\left(V_{i_1}{}^{j_1}\cdots V_{i_p}{}^{j_p}\right) = \delta_{i_1}{}^{j_p}\delta_{i_2}{}^{j_1}\cdots\delta_{i_p}{}^{j_{p-1}} \tag{18}$$

となるので

$$C_p = g_{i_1\cdots i_p}^{j_1\cdots j_p} A_{j_1}{}^{i_1}\cdots A_{j_p}{}^{i_p} = A_{i_2}{}^{i_1}A_{i_3}{}^{i_2}\cdots A_{i_p}{}^{i_{p-1}}A_{i_1}{}^{i_p} \tag{19}$$

と書ける。$gl(n,R)$ の Cartan subalgebra は

$$H_i = A_i{}^i, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \text{no sum over } i \tag{20}$$

である。
さて表現空間のベクトルであって、$H_i$ の固有値が $m_i$ であるものを $|m\rangle$ と記することにしよう。つまり

$$H_i\,|m\rangle = m_i\,|m\rangle. \tag{21}$$

$n$ 個の数の組 $m = (m_1, \dots, m_n)$ を weight vector と呼ぶことにしよう。2 つの weight vectors $m$ と $m'$ の差 $m - m'$ の成分を第 1 成分から順番に見てゆくとき、初めて 0 でなくなるものが正のとき、$m$ is higher than $m'$ と言い、$m > m'$ と書く。ある規約表現において $m$ がそれ自身を除く他の任意の weight $m'$ に対して $m > m'$ を満たすとき、$m$ は highest weight であると言う。一般に規約表現はその highest weight によって指定することができる。(14) より

$$[H_i, A_l{}^k] = \left(\delta_l{}^i - \delta_k{}^i\right)A_l{}^k, \quad \text{no sum} \tag{22}$$

であるから (21), (22) より

$$H_i A_l{}^k|m\rangle = \left(m_i + \delta_l{}^i - \delta_k{}^i\right)A_l{}^k|m\rangle, \quad \text{no sum} \tag{23}$$

となる。(23) により $l < k$ の場合、ベクトル $|m\rangle$ に対する weight よりもベクトル $A_l{}^k|m\rangle$ に対する weight の方が higher であることがわかる。この意味で $A_l{}^k$, $(l < k)$ は raising operator である。従って $m$ が highest weight である場合、必然的に

$$A_l{}^k|m\rangle = 0, \quad (l < k) \tag{24}$$

が成立する。今後 $m$ は highest weight であるとする。いま

$$(T_q)_j{}^i = A_{i_2}{}^i A_{i_3}{}^{i_2} \cdots A_{i_q}{}^{i_{q-1}} A_j{}^{i_q} \tag{25}$$

なるテンソル演算子を定義すると (19) は

$$C_p = (T_{p-1})_j{}^i A_i{}^j \tag{26}$$

と書ける。(25) は

$$[A_j{}^i, (T_q)_l{}^k] = \delta_l{}^i (T_q)_j{}^k - \delta_j{}^k (T_q)_l{}^i \tag{27}$$

を満足することが確かめられるので、$(T_q)_l{}^k$, $(l < k)$ もやはり raising operator であって

$$(T_q)_l{}^k|m\rangle = 0, \quad (l < k) \tag{28}$$

である。(24), (26), (27) より

$$\begin{aligned}
C_p|m\rangle &= \left( \sum_{i>j} (T_{p-1})_j{}^i A_i{}^j + \sum_i (T_{p-1})_i{}^i A_i{}^i \right) |m\rangle \\
&= \sum_{i>j} \left( A_j{}^i (T_{p-1})_j{}^i + \delta_i{}^i (T_{p-1})_j{}^j - \delta_j{}^j (T_{p-1})_i{}^i \right) |m\rangle + \sum_i m_i (T_{p-1})_i{}^i |m\rangle
\end{aligned}$$

であるが、ここで (28) を使うと

$$\begin{aligned}
C_p|m\rangle &= \sum_{i>j} \left( (T_{p-1})_j{}^j - (T_{p-1})_i{}^i \right) |m\rangle + \sum_i m_i (T_{p-1})_i{}^i |m\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} (m_i + n + 1 - 2i)(T_{p-1})_i{}^i |m\rangle
\end{aligned} \tag{29}$$

となる。一方 (25) より

$$(T_{p-1})_i{}^i = \sum_j (T_{p-2})_j{}^i A_i{}^j, \quad \text{no sum over } i$$

であるから、再び (24), (28) に注意して

$$
\begin{aligned}
(T_{p-1})_i{}^i|m\rangle &= \sum_{j=1}^{n}(T_{p-2})_j{}^i A_i{}^j|m\rangle \\
&= \left(\sum_{j=1}^{i-1}(T_{p-2})_j{}^i A_i{}^j + m_i(T_{p-2})_i{}^i\right)|m\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{i-1}\left((T_{p-2})_j{}^j - (T_{p-2})_i{}^i + A_i{}^j(T_{p-2})_j{}^i\right)|m\rangle + m_i(T_{p-2})_i{}^i|m\rangle \\
&= \left((m_i+1-i)(T_{p-2})_i{}^i + \sum_{j=1}^{i-1}(T_{p-2})_j{}^j\right)|m\rangle, \text{ (no sum over } i) \quad (30)
\end{aligned}
$$

となることがわかる。ここで

$$
\theta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i > j) \\ 0 & (i \leq j) \end{cases} \tag{31}
$$

という記号を使えば (30) は

$$
\begin{aligned}
(T_{p-1})_i{}^i|m\rangle &= \sum_{j=1}^{n}\{(m_i+1-i)\delta_{ij}+\theta_{ij}\}(T_{p-2})_j{}^j|m\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(T_{p-2})_j{}^j|m\rangle, \quad \text{(no sum over } i), \qquad (32)
\end{aligned}
$$

$$
a_{ij} = (m_i+1-i)\delta_{ij}+\theta_{ij}, \quad \text{(no sum)} \tag{33}
$$

と書けることがわかる。(32) を繰り返し用いると

$$
\begin{aligned}
(T_{p-1})_i{}^i|m\rangle &= \sum_j (a^{p-2})_{ij}(T_1)_j{}^j|m\rangle \\
&= \sum_j (a^{p-2})_{ij}A_j{}^j|m\rangle \\
&= \sum_j (a^{p-2})_{ij}m_j|m\rangle, \quad \text{(no sum over } i) \qquad (34)
\end{aligned}
$$

となるので、これと (29) より highest weight $m$ を持つ表現に対する $C_p$ のスペクトル $C_p(m)$ は

$$C_p(m) = \sum_{i,j} (m_i + n + 1 - 2i)(a^{p-2})_{ij} m_j$$

となる。ところが (33) より

$$\sum_k a_{ki} = m_i + n + 1 - 2i, \quad \sum_l a_{jl} = m_j$$

が成り立つから結局

$$C_p(m) = \sum_{i,j,k,l} a_{ki}(a^{p-2})_{ij} a_{jl} = \sum_{i,j} a^p_{ij} \tag{35}$$

なる公式が得られる。(33) と (35) を使えば任意の表現に対して任意の次数の Casimir invariant を計算することができる。
次に (35) の少し違った表し方を求めてみよう。

$$\alpha_i = m_i + 1 - i \tag{36}$$

とすれば、行列 $a$ は

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \alpha_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{37}$$

のような形であり、$a$ の固有値は明らかに $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ である。そこで固有値 $\alpha_i$ に対する固有ベクトルを $(X_{1i}, X_{2i}, \ldots, X_{ni})^T$ とする。ここで記号 $T$ は転置を示すものとする。固有方程式より

$$\begin{aligned} & X_{jj} = 1, \ \text{(no sum over } j), \quad X_{j+1,j} = \frac{1}{\alpha_j - \alpha_{j+1}}, \ \text{(no sum)}, \\ & X_{ij} = \frac{1}{\alpha_j - \alpha_i} \prod_{k=j+1}^{i-1} \frac{\alpha_j - \alpha_k + 1}{\alpha_j - \alpha_k}, \quad (j \leq i-2) \qquad (38) \\ & X_{ij} = 0, \quad (j > i) \end{aligned}$$

と決めることができる。行列 $a$ は行列 $B = (X_{ij})$ によって

$$B^{-1} a B = a_D, \quad (a_D)_{ij} = \alpha_i \delta_{ij}, \quad \text{(no sum over } i) \tag{39}$$

のように対角化することができる。$B^{-1} = (y_{ij})$ と書くことにすれば

$$
\begin{aligned}
& y_{jj} = 1, \ \text{(no sum over } j), \quad y_{j+1,j} = \frac{1}{\alpha_{j+1} - \alpha_j}, \ \text{(no sum)} \\
& y_{ij} = \frac{1}{\alpha_i - \alpha_j} \prod_{k=j+1}^{i-1} \frac{\alpha_i - \alpha_k + 1}{\alpha_i - \alpha_k}, \quad (j \leq i-2), \\
& y_{ij} = 0, \quad (j > i)
\end{aligned}
\tag{40}
$$

となるので

$$
\begin{aligned}
C_p(m) &= \sum_{i,j} a_{ij}^p = \sum_{k=1}^n \alpha_k^p \sum_{i=1}^n X_{ik} \sum_{j=1}^n y_{kj} \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i^p \prod_{j=1\,(j \neq i)}^n \left(1 + \frac{1}{\alpha_i - \alpha_j}\right)
\end{aligned}
\tag{41}
$$

であることがわかる。複素 $\alpha$ 平面を考え、積分路として反時計回りの半径 $R$ の円 $\Gamma$ を考えると (41) は

$$
C_p(m) = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \alpha^p \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{\alpha - \alpha_i}\right) d\alpha \tag{42}
$$

と書ける。更に $\alpha = 1/z$ と変数変換すると

$$
C_p(m) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z^{p+2}} \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{z}{1 - \alpha_i z}\right) dz \tag{43}
$$

となる。ただし $\gamma$ は原点を中心として半径 $\epsilon$ の反時計回りの円である。(43) によって

$$
\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{z}{1 - \alpha_i z}\right) = 1 + nz + C_1(m) z^2 + \cdots + C_p(m) z^{p+1} + \cdots \tag{44}
$$

つまり

$$
G(z) = \frac{1}{z} \left( \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{z}{1 - \alpha_i z}\right) - 1 \right) \tag{45}
$$

なる関数を定義すれば

$$
G(z) = n + \sum_{p=1}^\infty C_p(m) z^p \tag{46}
$$

となっていることがわかる。故に

$$C_p(m) = \frac{1}{p!}\left.\frac{\partial^p}{\partial z^p}\,G(z)\right|_{z=0} \tag{47}$$

が成立する。この意味で $G(z)$ をカシミア不変量の生成母関数という。ともかく highest weight $m=(m_1,m_2,\ldots,m_n)$ を持つ $U(n)$ の表現の $C_p$ を計算するには、単に関数 $G(z)$ を級数展開し、$z^p$ の係数を見るだけでよい。実際に計算する場合には公式 (35) を使っても、母関数の方法を使っても要する労力は同程度である。なお $U(n)$ の表現を Young frame で特徴づけるとき、$m_i$ は第 $i$ 行の長さ (箱の数) である。以上の議論では規格化については言及していないので、取り扱う問題に応じて適当な規格化因子を決めなければならない。

## 3.2 $SU(n)$ のカシミア不変量

Lie algebra $su(n)$ の Cartan subalgebra は $n-1$ 次元であるが、これを 1 次従属である $n$ 個の bases で表すのが今の場合便利である。つまり $gl(n,R)$ の ${A_i}^i$, (no sum over $i$) を使い

$$\tilde{A_i}^i = {A_i}^i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {A_k}^k, \quad (i=1,2,\ldots,n), \quad (\text{no sum over } i) \tag{48}$$

とする。3.1 で議論した $U(n)$ の場合の ${A_i}^i$, (no sum over $i$) を $\tilde{A_i}^i$, (no sum over $i$) で置き換える以外は全て同じ議論が使える。(48) は $U(n)$ の場合の $m_i$ を

$$\tilde{m}_i = m_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k \tag{49}$$

に置き換えれば $SU(n)$ の Casimir invariants を得ることができることを示している。それ故 (35) と (33) に対応する公式は $SU(n)$ の場合は

$$C_p(m) = \sum_{i,j}(a^p)_{ij}, \tag{50}$$

$$a_{ij} = \left(1 - i + m_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k\right)\delta_{ij} + \theta_{ij} \tag{51}$$

となる。また (36), (45), (46), (47) に対応する公式は

$$\alpha_i = 1 - i + m_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{52}$$

$$G(z) = \frac{1}{z}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{1-\alpha_i z}\right) - 1\right), \tag{53}$$

$$C_p(m) = \frac{1}{p!}\,\frac{\partial^p}{\partial z^p}\,G(z)\bigg|_{z=0} \tag{54}$$

となる。$SU(n)$ の表現を Young frame で指定するとき、$m_i$ は第 $i$ 行の長さ (箱の数) である。従って standard frame では $m_n = 0$ である。式 (50) あるいは (54) を直接用いて得られる応用上有用な例をいくつか最後の節であげることにする。

# 4 $SO(N)$ と $Sp(2n)$ のカシミア不変量

$Sp(2n)$ は 2 次形式

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x^i y^{-i} - x^{-i} y^i\right) = \sum_{i,j} h_{ij} x^i y^j, \quad (i, j = -n, -n+1, \ldots -1, 1, \ldots, n) \tag{55}$$

を不変に保つような変換群として定義することができる。ただし

$$h_{ij} = \varepsilon_i \delta_{i,-j} \quad (\text{no sum over } i), \tag{56}$$

$$\varepsilon_i = \begin{cases} +1 & (i > 0) \\ -1 & (i < 0) \end{cases} \tag{57}$$

である。(55) で $x^{-i}$ などは単なる文字であり、$1/x^i$ ではないので注意しておく。一方 $SO(N)$ は 2 次形式

$$\sum_{i=1}^{N} \xi^i \eta^i$$

を不変に保つ変換群として定義することができる。$Sp(2n)$ と $SO(N)$ を統一的に扱うためには、$SO(N)$ の場合の $N$ 次元ベクトルを次のように組みかえた方が便利である:

$$x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi^1 + i\xi^2\right),\ x^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi^1 - i\xi^2\right),\ \ldots \tag{58}$$

$$x^0 = \xi^N \quad \text{in the case that } N \text{ is odd.} \tag{59}$$

$\eta^i$ についても同様である。そうすると

$$\sum_{i=1}^{N} \xi^i \eta^i = \sum_{i,j} g_{ij} x^i y^i, \tag{60}$$

$$g_{ij} = \delta_{i,-j} \tag{61}$$

と書ける。ただし

$$i, j = \begin{cases} -n, \ldots, -1, 1, \ldots, n & \text{if } N = 2n, \\ -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n & \text{if } N = 2n+1 \end{cases} \tag{62}$$

である。(60) より $SO(N)$ は 2 次形式

$$\sum_{i,j} g_{ij} x^i y^j$$

を不変に保つ変換群として定義されることになり、(55) と同じ形なので $Sp(2n)$ と同じように扱うことができる。$N = 2n$ の場合と、$N = 2n + 1$ の場合をくらべるとき、添え字の範囲が異なることに注意しなければならない。
2 次形式を不変に保つような無限小変換を調べることにより、簡単に Lie algebra の性質がわかる。まず $SO(N)$ の場合

$$[X_j{}^i, X_l{}^k] = \delta_j{}^k X_l{}^i - \delta_l{}^i X_j{}^k + \delta_j{}^{-l} X_{-i}{}^k - \delta_{-i}{}^k X_l{}^{-j}, \tag{63}$$

$$X_j{}^i = -X_{-i}{}^{-j} \qquad (SO(N)) \tag{64}$$

となり、$Sp(2n)$ の場合

$$[X_j{}^i, X_l{}^k] = \delta_j{}^k X_l{}^i - \delta_l{}^i X_j{}^k + \varepsilon_i \varepsilon_j \delta_j{}^{-l} X_{-i}{}^k + \varepsilon_j \varepsilon_k \delta_{-i}{}^k X_l{}^{-j}, \ \text{(no sum)} \tag{65}$$

$$X_j{}^i = -\varepsilon_i \varepsilon_j X_{-i}{}^{-j} \qquad (Sp(2n)) \ \text{(no sum)} \tag{66}$$

となる。いずれの場合も Cartan subalgebra は $X_i{}^i$, (no sum), $(n = 1, 2, \ldots, n)$ で形成される。ところで

$$[X_i{}^i, X_l{}^k] = \left( \delta_i{}^k + \delta_i{}^{-l} - \delta_i{}^l - \delta_i{}^{-k} \right) X_l{}^k, \quad \text{(no sum over } i) \tag{67}$$

が $SO(N)$ の場合にも $Sp(2n)$ の場合にも成立するから、Cartan subalgebra の bases の順番を

$$H_i = X_{n+1-i}{}^{n+1-i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{68}$$

で定義すれば $X_l{}^k$, $(l < k)$ は raising operator であることがわかる。従って $m$ が highest weight であれば

$$X_l{}^k|m\rangle = 0, \quad (l < k) \tag{69}$$

が成立する。(68) より

$$X_i{}^i|m\rangle = m_{n+1-i}|m\rangle, \quad \text{(no sum)} \tag{70}$$

である。また

$$X_{-i}{}^{-i} = -X_i{}^i, \quad \text{(no sum)} \tag{71}$$

であるから

$$m_{n+1+i} = -m_{n+1-i} \tag{72}$$

が成り立つ。
$p$ 次の Casimir invariant $C_p$ は (19) と同様に

$$C_p = X_{i_2}{}^{i_1} X_{i_3}{}^{i_2} \cdots X_{i_p}{}^{i_{p-1}} X_{i_1}{}^{i_p} \tag{73}$$

と書けるが、テンソル演算子 $T_q$ を

$$(T_q)_j{}^i = X_{i_2}{}^i X_{i_3}{}^{i_2} \cdots X_{i_q}{}^{i_{q-1}} X_j{}^{i_q} \tag{74}$$

で定義すると

$$C_p = (T_{p-1})_j{}^i X_i{}^j \tag{75}$$

となる。(74),(63),(64),(65) および (66) より $SO(N)$ の場合

$$[X_j{}^i, (T_q)_l{}^k] = \delta_j{}^k (T_q)_l{}^i - \delta_l{}^i (T_q)_j{}^k + \delta_j{}^{-l} (T_q)_{-i}{}^k - \delta_{-i}{}^k (T_q)_l{}^{-j} \tag{76}$$

が成り立ち、$Sp(2n)$ の場合

$$[X_j{}^i, (T_q)_l{}^k] = \delta_j{}^k (T_q)_l{}^i - \delta_l{}^i (T_q)_j{}^k + \varepsilon_i \varepsilon_j \delta_j{}^{-l} (T_q)_{-i}{}^k + \varepsilon_j \varepsilon_k \delta_{-i}{}^k (T_q)_l{}^{-j} \tag{77}$$

が成り立つことを確かめることができる。(77) では no sum over $i$, $j$ and $k$ である。(76) と (77) より、$(T_q)_l{}^k, (l < k)$ は raising operator であり、$m$ が highest weight のとき

$$(T_q)_l{}^k|m\rangle = 0, \quad (l < k) \tag{78}$$

が成立する。また (76) と (77) より特に

$$[X_i{}^j, (T_q)_j{}^i] = (1 \pm \delta_{-i}{}^j)\left((T_q)_j{}^j - (T_q)_i{}^i\right), \quad \text{(no sum over } i \text{ and } j) \tag{79}$$

であることがわかる。ただし複号は上が $Sp(2n)$ で下が $SO(N)$ に相当する。(69) と (70) より

$$C_p|m\rangle = \sum_{i>j}(T_{p-1})_j{}^i X_i{}^j|m\rangle + \sum_i m_{n+1-i}(T_{p-1})_i{}^i|m\rangle$$

となるが、更に (78) と (79) を利用すると

$$\begin{aligned} C_p|m\rangle &= \sum_{i>j}(1 \pm \delta_{-i}{}^j)\left((T_{p-1})_i{}^i - (T_{p-1})_j{}^j\right)|m\rangle + \sum m_{n+1-i}(T_{p-1})_i{}^i|m\rangle \\ &= \sum_i \left(\sum_{j(j<i)}(1 \pm \delta_{-i}{}^j) - \sum_{j(j>i)}(1 \pm \delta_{-i}{}^j) + m_{n+1-i}\right)(T_{p-1})_i{}^i|m\rangle \end{aligned}$$

を得る。次に

$$\sum_{j(j<i)}(1 \pm \delta_{-i}{}^j) = 2r_i, \tag{80}$$

$$\sum_{j(j>i)}(1 \pm \delta_{-i}{}^j) = 2s_i \tag{81}$$

とすれば

$$C_p|m\rangle = \sum_i (m_{n+1-i} + 2r_i - 2s_i)(T_{p-1})_i{}^i|m\rangle \tag{82}$$

となる。一方 (69) より

$$\begin{aligned} (T_{p-1})_i{}^i|m\rangle &= \sum_j (T_{p-2})_j{}^i X_i{}^j|m\rangle \\ &= \sum_{j(j\leq i)}(T_{p-2})_j{}^i X_i{}^j|m\rangle, \quad \text{(no sum over } i) \end{aligned}$$

ってであるが、(78) と (79) を使って

$$(T_{p-1})_i{}^i|m\rangle = \left((m_{n+1-i} + 2r_i)(T_{p-2})_i{}^i - \sum_{j(j<i)}(1 \pm \delta_{-i}{}^j)(T_{p-2})_j{}^j\right)|m\rangle, \text{(no sum over } i)$$

だから

$$a_{ij} = (m_{n+1-i} + 2r_i)\delta_{ij} - Q_{ij}, \quad \text{(no sum over } i), \tag{83}$$

$$Q_{ij} = \begin{cases} 1 \pm \delta_{-i}{}^{j}, & (i > j) \\ 0, & (i \leq j) \end{cases} \tag{84}$$

で行列 $a$ を導入すると

$$(T_{p-1})_i{}^i |m\rangle = \sum_j a_{ij} (T_{p-2})_j{}^j |m\rangle, \quad \text{(no sum over } i) \tag{85}$$

が得られる。(85) を繰り返し用いることによって結局

$$(T_{p-1})_i{}^i |m\rangle = \sum_j (a^{p-2})_{ij} m_{n+1-j} |m\rangle, \quad \text{(no sum over } i) \tag{86}$$

となる。(82) と (86) より、highest weight $m$ の表現に対する $C_p$ のスペクトル $C_p(m)$ は

$$c_p(m) = \sum_{i,j} (m_{n+1-i} + 2r_i - 2s_i)(a^{p-2})_{ij} m_{n+1-j}$$

と書ける。ところが (83) と (84) より

$$\sum_k a_{ki} = m_{n+1-i} + 2r_i - 2s_i,$$
$$\sum_l a_{jl} = m_{n+1-j}$$

であるから、最終的に

$$C_p(m) = \sum_{i,j} a^p_{ij} \tag{87}$$

となる。最後に具体的に $SO(2n)$, $Sp(2n)$, $SO(2n+1)$ の場合に分けて行列 $a$ の形を与えておく。まず (80) より

$$2r_i = n + i - 1 - \varepsilon_i, \quad \text{for } SO(2n), \tag{88}$$
$$2r_i = n + i, \quad \text{for } Sp(2n), \tag{89}$$
$$2r_i = n + i - \theta_{i0}, \quad \text{for } SO(2n+1) \tag{90}$$

であることがわかるので、(83) より

$$a_{ij} = (m_{n+1-i} + n + i - 1 - \varepsilon_i)\delta_{ij} - \theta_{ij} + \frac{1}{2}(1+\varepsilon_i)\delta_i{}^{-j},\ SO(2n), \tag{91}$$

$$a_{ij} = (m_{n+1-i} + n + i)\delta_{ij} - \theta_{ij} - \frac{1}{2}(1+\varepsilon_i)\delta_i{}^{-j},\ Sp(2n), \tag{92}$$

$$a_{ij} = (m_{n+1-i} + n + i - \theta_{i0})\delta_{ij} - \theta_{ij} + \theta_{i0}\delta_i{}^{-j},\ SO(2n+1), \tag{93}$$

となる。ただし $i$ についての和は行わないものとし、$\theta_{ij}$ は (31) で定義してある。(91), (92), (93) を (87) に代入すれば任意の既約表現に対して任意の次数の Casimir invariant を計算することができる。若干の有用な例を次節であげることにする。

# 5 幾つかの有用な公式

## 5.1 *SU(n)* について

$SU(n)$ の defining representation つまり $n$ 次元表現の hermitian generators を $t_i$, highest weight が $m_i - (1/n)\sum_k m_k$, (つまり Young frame の第 $i$ 行の長さが $m_i$) である既約表現の hermitian generators を $\Lambda_i$ とする。規格化は

$$\mathrm{Tr}(t_i t_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij} \tag{94}$$

で固定する。

$$C_2(m)\cdot \boldsymbol{1} = \sum_i \Lambda_i\Lambda_i, \tag{95}$$

$$\mathrm{Tr}(\Lambda_i\Lambda_j) = T(m)\delta_{ij}, \tag{96}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\{\Lambda_i,\Lambda_j\}\Lambda_k\right) = K(m)\mathrm{Tr}\left(\{t_i,t_j\}t_k\right), \tag{97}$$

で $C_2$, $T$, $K$ を定義する。ただし $\{X,Y\} = XY + YX$ であり、(97) は $n > 2$ のときのみ意味がある。(97) は場の理論における chiral anomaly に関係する重要な量である。また $\boldsymbol{1}$ は単位行列を表している。$C_2$, $T$, $K$ に対する公式は次の通りである。

$$
\begin{aligned}
C_2(m) = \frac{1}{2n}\Bigg\{ & \Big(\sum_i m_i\Big) n^2 + \Big(\sum_i m_i^2 + \sum_i m_i - 2\sum_i i m_i\Big) n \\
& - \Big(\sum_i m_i\Big)^2 \Bigg\},
\end{aligned}
\tag{98}
$$

$$
T(m) = \frac{1}{n^2-1}\, D(m) C_2(m), \tag{99}
$$

$$
\begin{aligned}
K(m) = \frac{1}{n(n^2-1)(n^2-4)} D(m) \Bigg\{ & \Big(\sum_i m_i\Big) n^4 + 3\Big(\sum_i m_i^2 + \sum_i m_i \\
& - 2\sum_i i m_i\Big) n^3 + \Big[ 2\sum_i m_i - 6\sum_i i m_i - 6\sum_i i m_i^2 + 6\sum_i i^2 m_i \\
& - 6\Big(\sum_i m_i\Big)^2 + 3\sum_i m_i^2 + 2\sum_i m_i^3 \Big] n^2 \\
& - 6\Big(\sum_i m_i\Big)\Big(\sum_i m_i^2 + \sum_i m_i - 2\sum_i i m_i\Big) n + 4\Big(\sum_i m_i\Big)^3 \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{100}
$$

ここで $D(m)$ は表現の次元であり、

$$
f_i = m_i + n - i, \tag{101}
$$

$$
\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i<j} (x_i - x_j) \tag{102}
$$

とするとき

$$
D(m) = \frac{\Delta(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, 0)}{\Delta(n-1, n-2, \ldots, 1, 0)} \tag{103}
$$

で与えられる。

### 5.2 *SO(2n)* について

$2n$ 次元ベクトル表現の generators を $t_i$ とし、highest weight $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ なる表現の generators を $\Lambda_i$ とする。規格化を

$$
\mathrm{Tr}(t_i t_j) = \delta_{ij} \tag{104}
$$

で固定し

$$C_2(m) \cdot \boldsymbol{1} = \sum_i \Lambda_i \Lambda_j \tag{105}$$

とするとき

$$C_2(m) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \Big( m_i^2 + 2(n-i) m_i \Big). \tag{106}$$

## 5.3 *SO(2n+1)* について

$2n+1$ 次元ベクトル表現の generators を $t_i$ とし、highest weight $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ の表現の generrators を $\Lambda_i$ とする。規格化を

$$\mathrm{Tr}(t_i t_j) = \delta_{ij} \tag{107}$$

で固定し

$$C_2(m) \cdot \boldsymbol{1} = \sum_i \Lambda_i \Lambda_i \tag{108}$$

とするとき

$$C_2(m) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \Big\{ m_i^2 + 2\Big(n + \frac{1}{2} - i\Big) m_i \Big\}. \tag{109}$$

## 5.4 *Sp(2n)* について

$2n$ 次元ベクトル表現の generators を $t_i$ とし、highest weight $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ なる表現の generators を $\Lambda_i$ とする。規格化を

$$\mathrm{Tr}(t_i t_j) = \delta_{ij} \tag{110}$$

で固定し

$$C_2(m) \cdot \boldsymbol{1} = \sum_i \Lambda_i \Lambda_i \tag{111}$$

とするとき

$$C_2(m) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \Big\{ m_i^2 + 2(n+1-i) m_i \Big\}. \tag{112}$$

# 参考文献

1 Barut, A. O. and Raczka, R. (1977). *Theory of Group Representations and Applications*. Warszawa: Polish Scientific Publishers.

2 Gilmore, R. (1974). *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*. New York: Wiley.